CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1978

•

CONCOURS SCIENCES

EPREUVE DE CALCUL

Durée : 2 heures

Samedi 6 mai 1978 de 14 heures à 16 heures

•

Le candidat présentera ses calculs dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires. Pour chaque calcul, il précisera le moyen de calcul utilisé.

1. — Sachant que l'équation :

$$(2 - x^2) \sin x = 2x \cos x$$

a une racine $\bar{x}$ au voisinage de $x = 2$, calculer une approximation de $\bar{x}$ à 10^{-2} près en utilisant la méthode de Newton.

2. — On note f la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et g la fonction continue sur $[0, \pi]$ qui vérifie :

$$g(x) = \pi f(x), \quad \forall x \in]0, \pi] .$$

a) Pour $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et 6, calculer $g\left(\frac{i\pi}{6}\right)$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-7}.

b) Tracer le graphe de g sur $[0, \pi]$ en faisant figurer le point d'inflexion (supposé unique) au voisinage de $x = 2$.

3. — On note $T(h)$ l'approximation de l'intégrale $I = \int_0^{\pi} f(x)\, dx$ que fournit la formule des trapèzes appliquée avec le pas $h = \dfrac{\pi}{p}$ où p est un entier positif, et on se propose de calculer $T(h)$ quand h prend les quatre valeurs suivantes :

$$h_0 = \pi, \quad h_1 = \frac{\pi}{2}, \quad h_2 = \frac{\pi}{3} \text{ et } \quad h_3 = \frac{\pi}{6} .$$

Afin de simplifier les calculs, on introduit les quatre nombres :

$$Q_0 = \frac{g(0) + g(\pi)}{2}$$

$$Q_1 = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q_2 = g\left(\frac{\pi}{3}\right) + g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$Q_3 = g\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

.../...

a) Pour $i = 0, 1, 2$ et 3, expliciter $T(h_i)$ en fonction des quatre nombres Q_j.

b) Pour $j = 0, 1, 2$ et 3, calculer Q_j avec une précision absolue de 10^{-7}.

c) En déduire les valeurs $T(h_i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

4 — Etant donnés $n+1$ couples $(u_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, tels que les u_i soient tous distincts, nous admettrons qu'il existe un et un seul polynôme P de degré n qui vérifie :

$$P(u_i) = v_i \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Nous dirons alors que P interpole les $n+1$ couples (u_i, v_i).

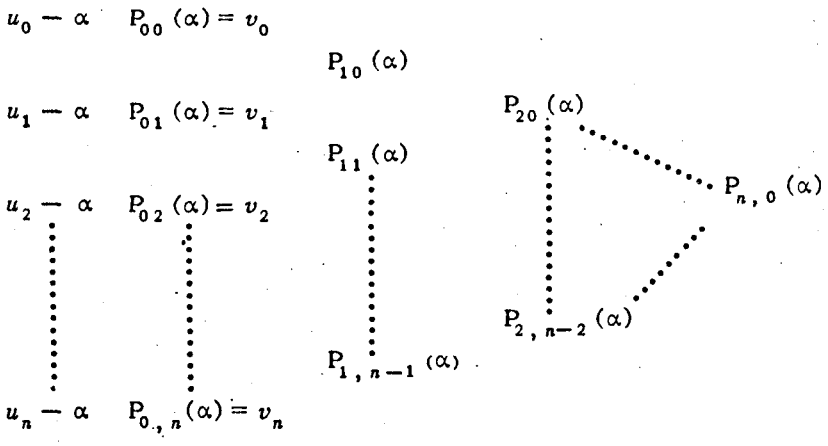
Pour toute paire (k, i) d'entiers positifs ou nuls vérifiant $k + i \leqslant n$, nous notons $P_{k,i}$ le polynôme de degré k qui interpole les $k+1$ couples (u_{i+j}, v_{i+j}) pour $j = 0, \ldots, k$.

a) Montrer que les polynômes $P_{k,i}$ vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$P_{k,i}(x) = \frac{(x - u_i)\, P_{k-1,\,i+1}(x) - (x - u_{i+k})\, P_{k-1,\,i}(x)}{u_{i+k} - u_i} \qquad \text{(R)}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et $i = 0, 1, \ldots, n - k$.

Pour calculer la valeur $P_{n,0}(\alpha)$ où α est fixé, on dispose les valeurs $P_{k,i}(\alpha)$ dans le tableau suivant :



dans lequel, pour $k \geqslant 1$, les valeurs $P_{k,i}(\alpha)$ sont calculées à partir des valeurs $P_{k-1,i}(\alpha)$ et $P_{k-1,\,i+1}(\alpha)$ au moyen des relations (R).

b) Utiliser cet algorithme pour calculer avec une précision absolue de 10^{-6} la valeur en $\alpha = 0$ du polynôme de degré 3 qui interpole les quatre couples $\left(h_i^2, T(h_i)\right)$ pour $i = 0, 1, 2$ et 3.

On rappelle que

$$\pi = 3{,}141\,592\,654$$

et $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,808$ à $0{,}5\,10^{-9}$ près.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail